Die Polachse der Sonnenuhr

- und die Entfernungsmessung im Weltall

Die gedachte Linie vom Polos durch die Kugel des Gnomons (siehe Abb.1) zeigt genau auf den Himmelspol. Das ist der Punkt, um den sich das gesamte Himmelsgewölbe scheinbar dreht. Man nennt sie daher auch *Weltachse*.
Bei uns auf der Nordhalbkugel der Erde steht an dieser Stelle der Polarstern[1].

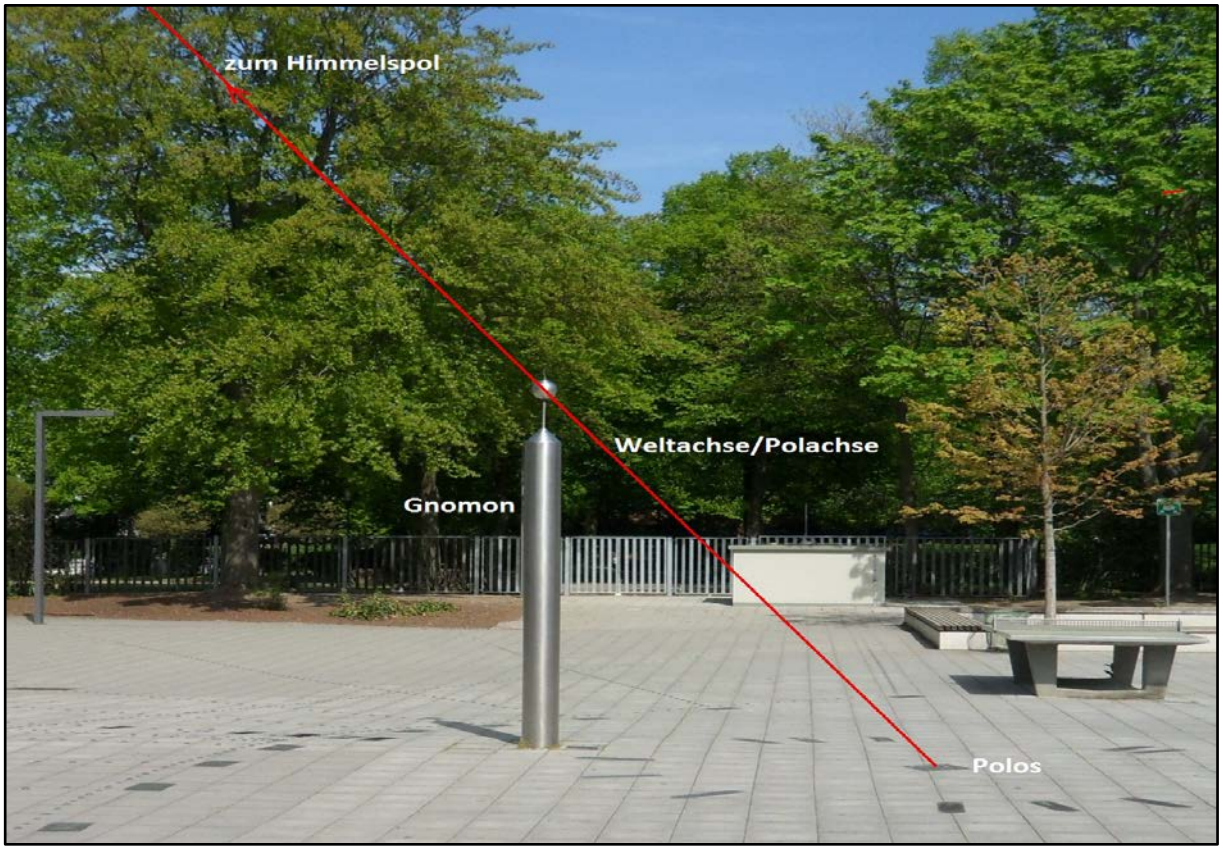

Abb. 1

Abb. 2: Polostafel

Auf der *Polostafel* (s. Abb. 2) sind die Ortskoordinaten, die Höhe über Normal Null, die Haupthimmelsrichtungen sowie das Datum der Fertigstellung der Sonnenuhr eingraviert.

Geographische Breite und Polhöhe
Misst man den Winkel zwischen der Polachse und der Horizontalen, die sog. Polhöhe h_P, ergibt sich für die APG-Sonnenuhr ein Winkel von 51°. Nun ist der Breitengrad von Köln, also der Winkel zwischen dem Erdäquator und unserem Breitengrad, auch 51°. Man könnte meinen, dass es sich hier um einen Zufall handelt. Doch in Wirklichkeit liegt hier eine allgemeingültige astronomische Beziehung zwischen Polhöhe h_P und geographischer Breite φ vor, die überall auf der Erde gilt:

$$h_P = \varphi$$

[1] Genau genommen steht der Polarstern mehr als ½ Bogengrad vom Himmelspol entfernt. Das scheint nicht viel zu sein, ist aber mehr als ein Vollmonddurchmesser.

Warum ist das so?

Zunächst sei an eine Urlaubserfahrung erinnert. Wenn man in Süditalien oder in Nordafrika den nächtlichen Sternenhimmel betrachtet, fällt auf, dass der Sternenhimmel einen anderen Anblick darbietet. Nicht dass sich etwa die Sternbilder geändert hätten, das ganze Himmelsgewölbe mit samt den Sternbildern ist in Nord-Süd-Richtung verschoben. So sieht man z.B. das Sternbild Skorpion viel höher und deutlicher über dem Südhorizont als bei uns, und Sternbilder, die bei uns nicht sichtbar sind, erscheinen. Umgekehrt steht der Polarstern entsprechend tiefer über dem Nordhorizont.

In einem Gedankenversuch kann man eine Reise auf einem Längengrad einmal nach Süden bis zum Äquator und dann nach Norden bis zum Nordpol machen und dabei die nächtlichen Sternbilder insbesondere den Polarstern im Blick behalten. Man wird dann bei der Südreise zum Äquator feststellen, dass die Polhöhe kontinuierlich abnimmt, bis er schließlich im Dunst des Horizonts verschwindet. Bei der Reise auf dem Längengrad zum Nordpol wird man hingegen konstatieren, dass die Polhöhe zunimmt, bis der Polarstern am Nordpol direkt senkrecht über dem Beobachter im sog. Zenit steht. Da die geographische Breite des Äquators per definitionem 0° und die des Nordpols 90° ist, entspricht die Polhöhe der geographischen Breite.

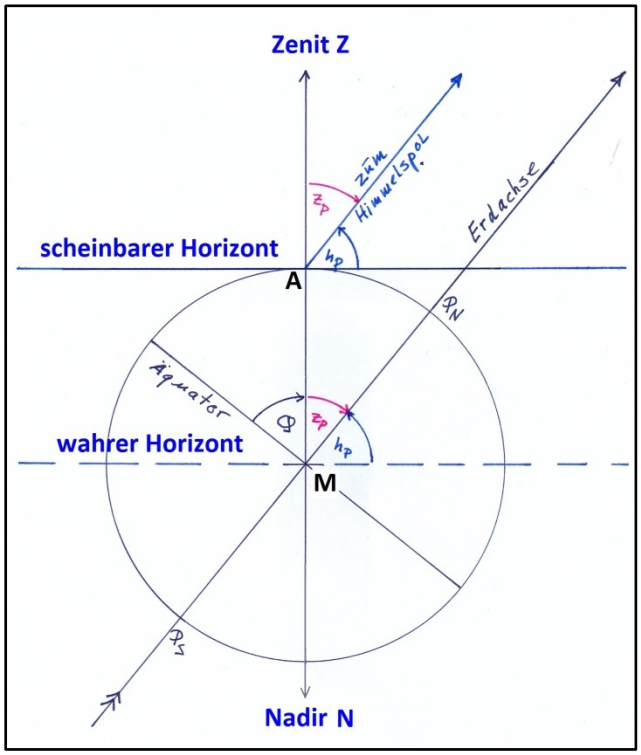

Abb. 3: Zum Zusammenhang zwischen Polhöhe h_P und geographischer Breite φ

Um die Verhältnisse genauer zu verstehen, benutzen wir die nebenstehende Skizze (Abb. 3.). Sie zeigt die geometrischen Verhältnisse auf der Erdkugel. A sei der Beobachtungsort. Er ist der Mittelpunkt des Gesichtskreises. Der (scheinbare) Horizont ist die Tangentialebene an die Erdkugel im Punkt A. Der Punkt senkrecht über A ist der Zenit Z. Den Winkel zwischen Zenit und Himmelspol ist die Zenitdistanz des Himmelspoles z_P. Es ist leicht zu erkennen, dass die beiden Winkel z_P und h_P Komplementwinkel sind, d.h. sie ergänzen sich zu 90°:

$$z_P + h_P = 90°$$

Die Zenit-Nadir-Achse des Beobachtungsortes bildet mit dem Äquator den Winkel φ, die geographische Breite des Beobachtungsortes. Die Erdachse steht per definitionem senkrecht auf der Äquatorebene. Man erkennt, dass Erdachse und Polachse Parallelen sind. D.h. die Winkel bei A und M sind Stufenwinkel, insbesondere tritt der Winkel z_P bei M wieder auf. Damit ergibt sich eine weitere Komplementbeziehung:

$$\varphi + z_P = 90°$$

Setzt man diese beiden Komplementbeziehungen gleich, ergibt sich:

$$z_P + h_P = \varphi + z_P$$
$$<=> \underline{\underline{h_P = \varphi}}$$

Damit ist die oben behauptete Allgemeingültigkeit dieser Formel erwiesen.

Ein unerwartetes Problem

Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass in diese Herleitung zwei nicht unmittelbar einsichtige *Voraussetzungen* eingegangen sind:
Pol- und *Erdachse* einerseits sowie *scheinbarer* und *wahrer Horizont* andererseits sind jeweils einander parallel (s. Abb.3). Warum ist das so? Bei der Pol- und Erdachse kommt noch hinzu, dass sie nicht nur parallel, sondern ganz offensichtlich identisch sind. Die Polachse ***ist*** die Erdachse! Denn beide zeigen auf den Himmelspol. Wie ist das möglich, wenn sie doch parallel sind, wie aus der Skizze ersichtlich? Zum anderen wird die Tangentialebene durch den Beobachtungspunkt A *scheinbarer* Horizont genannt und die Parallelebene durch den Mittelpunkt der Erde dagegen *wahrer* Horizont. Warum? Was berechtigt den Astronomen zu dieser Art Bezeichnung? „scheinbar“ bedeutet nicht wirklich. Wieso ist der Horizont im Beobachter ein nur scheinbarer, die dazu doch relativ willkürliche Parallelebene durch den Erdmittelpunkt aber der eigentlich wahre Horizont? Beide Fragen hängen miteinander zusammen. Aus dem Geometrieunterricht weiß man, dass sich Parallelen im Unendlichen schneiden. Hieße das, dass der Weltraum unendlich groß ist? Das wäre ein voreiliger Schluss. Es könnte genauso gut möglich sein, dass die *Entfernungen im Weltall* zwar nicht unendlich, aber doch so unvorstellbar groß sind, dass sie uns als quasi unendlich erscheinen. Dies soll im Folgenden schrittweise gezeigt werden.

Entfernungsbestimmung in der Astronomie

Wenn der Astronom ein Objekt am Himmelsgewölbe beobachtet und sich nicht mit dem Anblick begnügt, sondern systematische Kenntnisse über sein Beobachtungsobjekt ermitteln möchte, bestehen die ersten Aufgaben in der Positions- und Entfernungsbestimmung des Gestirns. Die erste Aufgabe ist relativ einfach, obwohl, wenn man z.B. an die Transformation vom Horizontsystem ins Äquatorsystem denkt, sie nicht mehr trivial ist. Die sich anschließende Aufgabe ist schon schwieriger - vor allem, wenn es um die praktische Realisation geht. Diese beiden Aufgaben bilden die Grundlage für alle weiteren astronomischen Untersuchungen und Aussagen. Sie bestimmen unsere Vorstellung vom Aufbau des Kosmos. Z.B. konnte die Frage, ob Kometen Erscheinungen innerhalb der Erdatmosphäre oder Vorgänge im Weltraum sind, erst entschieden werden, als man wusste, wie man astronomisch Entfernungen misst. *Newton* hätte das nach ihm benannte Gravitationsgesetz nicht finden können, wenn ihm die Mondentfernung nicht bekannt gewesen wäre. Im Jahre 1952 erkannte der in der Nähe von Minden geborene, aus einfachen Verhältnissen stammende weltberühmte Astronom *Walter Baade*, dass die bisherigen Entfernungen zu Galaxien um mindestens den Faktor 2 verdoppelt werden müssen. Diese wenigen Beispiele verdeutlichen die besondere Wichtigkeit der astronomischen Entfernungsmessung. Daher sei die *geometrische Methode*, die Basismethode unter den verschiedenen astronomischen Entfernungsmessverfahren, an der Entfernungsbestimmung eines *Meteors*, des *Mondes*, der *Planeten* und *naher Fixsterne* demonstriert.

Dass Wolken atmosphärische Erscheinungen der Troposphäre sind und sich damit bis in Höhen bis zu 10 000m abspielen, weiß heute jeder, der schon mal eine Flugreise gemacht

hat. Dass *Sternschnuppen (Meteore)* Leuchterscheinungen in der Atmosphäre sind, erscheint plausibel, da nicht selten der Meteorit[2] auf der Erde aufschlägt. Aber wo in der Atmosphäre findet das Leuchten statt? Da eine *direkte Entfernungsbestimmung* (mit dem Maßband oder anderem) nicht möglich ist, muss man sich andere *indirekte Verfahren* überlegen. Das klassische Verfahren aller indirekten Entfernungsbestimmungen ist die Dreiecksmethode,

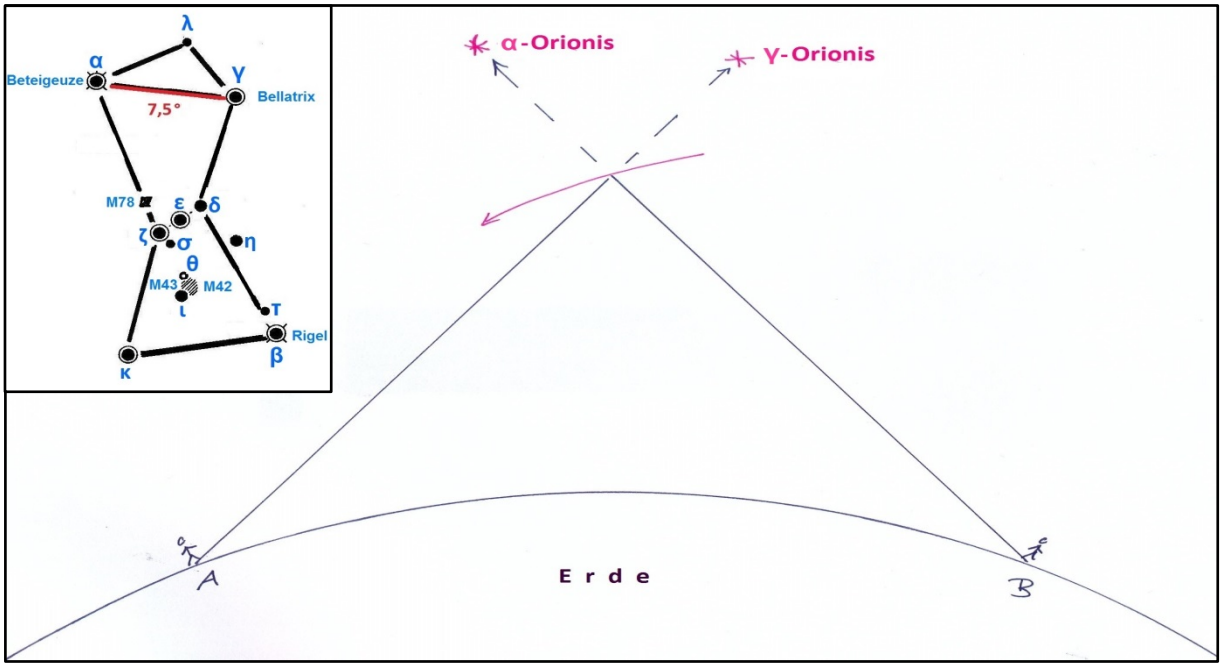

Abb. 4: Beobachtung einer Sternschnuppe von verschiedenen Orten auf der Erdoberfläche; [π(α-Ori, γ-Ori) ≈ 7,5°]

die immer schon erfolgreich bei der Vermessung größerer Distanzen auf der Erdoberfläche angewendet wurde. Sie beruht auf der trigonometrischen Einsicht, dass in einem Dreieck aus einer Seite und den anliegenden Winkeln die anderen Seiten berechnet werden können. Wenn z.B. zwei Hobbyastronomen dieselbe Sternschnuppe von verschiedenen Orten aus beobachten und eventuell ihre Beobachtung in einem Foto festhalten konnten, werden sie feststellen, dass die Leuchterscheinung vor einem jeweils etwas anderem Sternenhintergrund (z.B. vor dem Sternbild Orion, s. Abb. 4) stattgefunden hat. Dies ist nichts anderes als der sog. *Daumensprungeffekt*. Der ausgestreckte Daumen springt vor dem Hintergrund scheinbar seitlich hin und her, wenn er abwechselnd mit je einem Auge betrachtet wird. Die Astronomen haben dafür den Begriff *Parallaxe*[3] geprägt. In der Abb. 4 sehe der Beobachter A die Meteorspur beim Schulterstern Bellatrix (γ-Orionis) und Beobachter B aber nahe dem anderen Schulterstern Beteigeuze (α-Orionis). Dem Positionsunterschied der beiden Orionsterne entspricht ein Winkel von gut 7° am Himmelsgewölbe. Wenn die Entfernung der beiden Orte auf der Erde, die Dreiecksbasis (von der Erdkrümmung kann bei nicht allzu großen Distanzen der Beobachtungsorte abgesehen werden), und die Höhenwinkel[4] bekannt sind, kann man die Höhe[5] bestimmen, in der der Meteorit verglühte. Die Berechnungen ergeben dann Höhen bis zu rund 100km. Das

[2] *Meteorit* ist der in die Erdatmosphäre eintretende und eventuell auf der Erdoberfläche auftreffende Gesteinskörper, *Meteor* die Leuchterscheinung (*Sternschnuppe*), die von ihm verursacht wird.
[3] Das Wort Parallaxe leitet sich vom παραλλαξις (parallaxis) = Veränderung, Vertauschung ab.
[4] Höhenwinkel ist der Bogen am Himmelsgewölbe senkrecht auf dem Horizont bis zum Gestirn.
[5] Genau genommen ist sie noch nicht die Höhe der Erscheinung über der Erdoberfläche, sondern nur die mittlere Entfernung vom Beobachtungsort. Dafür müsste noch der Höhenwinkel des Visiersterns berücksichtigt

Leuchten der Sternschnuppen ist somit eine Erscheinung in den oberen Schichten der Atmosphäre an der Grenze zum eigentlichen Weltraum.

Die Entfernung Erde-Mond

Das Newtonsche Gravitationsgesetz z.B. in der Form $F = \gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ ist eine kompakte Aussage, die drei physikalische Einzelerkenntnisse zusammenfasst. Wer sich nicht mit seiner Kenntnis begnügen will, sondern sich die Frage stellt, wie *Newton* dazu gekommen ist, wird an der sog. *Mondrechnung* nicht vorbeikommen, in der die Fallbeschleunigung auf der Erde mit der Zentripetalbeschleunigung des Mondes verglichen wird. Newton ging von der Idee aus, dass es dieselbe Kraft ist, die den Stein auf der Erde fallen lässt und den Mond auf seiner Bahn um die Erde hält (man denke an seine Geschichte vom fallenden Apfel). Die Lösung dieses Problems steht und fällt aber mit der Kenntnis der Entfernung Erde – Mond. Wie schon oben erwähnt gehören Entfernungsmessungen zu den genuin astronomischen Grundaufgaben. Wie bestimmte man zu Newtons Zeiten die Entfernung zu astronomischen Objekten wie Mond, Sonne, Planeten? Der Grundansatz bleibt der gleiche wie bei der Berechnung der Entfernung der Sternschnuppe. Auch hier benutzt man die Gesetze der Trigonometrie. Nur genügen nun nicht mehr relativ kurze Strecken auf der Erdoberfläche, sondern man benutzt den Erdradius als Basisstrecke. Das Prinzip(!) dieser abgewandelten

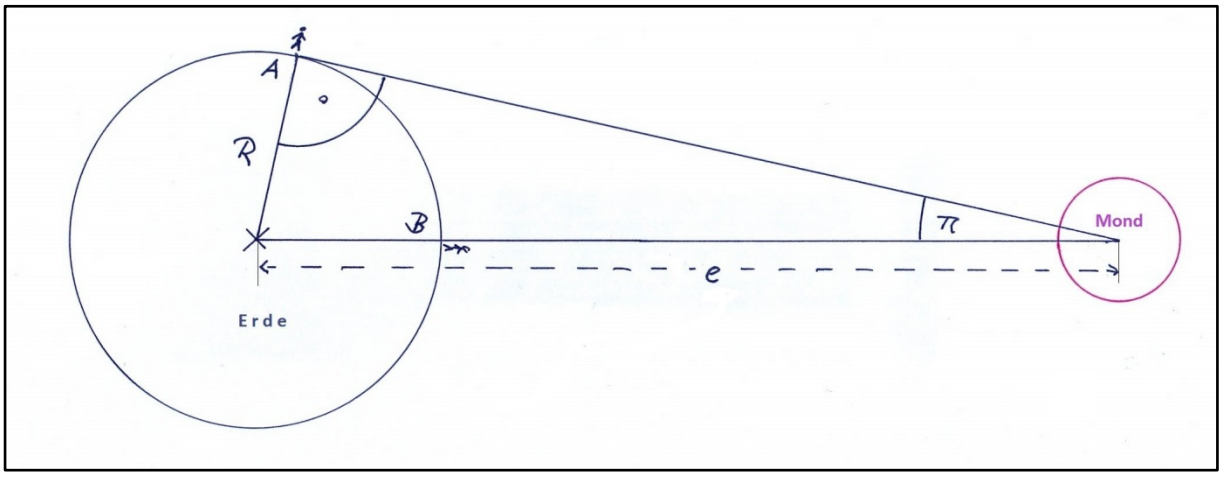

Abb. 5: Horizontal-Äquatorialparallaxe des Mondes

Methode sei mit Hilfe der Abb. 5 erläutert. Zwei Beobachter in unterschiedlichen Orten auf der Erde beobachten zur gleichen Zeit den Mond. Für Beobachter A gehe der Mond gerade auf; für Beobachter B kulminiere[6] er gerade. Die Horizontlinie der Beobachters A und die Zenit-Nadir-Linie des Beobachters B schneiden sich im Mittelpunkt des Mondes und bilden miteinander den Winkel π (Parallaxenwinkel). Das Dreieck aus Beobachter A, Erdmittelpunkt und Mond ist rechtwinkelig. Die Entfernung e ist die Hypotenuse, der Erdradius R ist bezüglich des Parallaxenwinkels π die Gegenkathete.

werden. Da es hier nur auf die Erläuterung des Prinzips der Dreiecksmethode ankommt, kann hier die weitere Erläuterung unterbleiben.

[6] d.h. er erreicht den höchsten Punkt seiner Bahn.

Somit gilt die Beziehung:

$$\frac{R}{e} = \sin\pi \Leftrightarrow e = \frac{R}{\sin\pi}$$

Die Parallaxe des Mondes beträgt 57´(Bogenminuten), also knapp ein Bogengrad. Das ist nicht viel, am Himmelsgewölbe sind das aber fast zwei Vollmonddurchmesser(!), also gut beobachtbar. Setzt man diesen Wert in die Formel ein, so ergibt sich:

$$e = \frac{R}{\sin 57'} = \frac{R}{\sin 0{,}95°} = \frac{R}{0{,}0165799} = 60{,}3 \cdot R$$

Die Entfernung Erde-Mond beträgt also das 60-Fache des Erdradius. Dieser Wert war Newton bekannt. Damit konnte er die Fallbeschleunigung auf der Erde und die Zentralbeschleunigung des Mondes mit dem Verhältnis von Erdradius und Mondentfernung in Beziehung setzen und so die Art der Abhängigkeit der Gravitationsbeschleunigung von der Entfernung ermitteln.

Zurück zur Ausgangsfrage. Mit 57´´ ist der Winkel zwischen den beiden Beobachtungsgeraden von A und B so klein, dass er zeichnerisch gar nicht mehr darstellbar ist, d.h. aber praktisch sind die beiden Geraden parallel. Oder anders ausgedrückt: Da der Erdradius gegenüber der Mondentfernung sehr klein ist $\left[R = \frac{e}{60{,}3}\right]$, kann der Erdradius bei astronomischen Betrachtungen vernachlässigt werden. Was für den Unterschied von scheinbarem und wahrem Horizont bezüglich des Mondes gilt, gilt erst recht für den von Erd- und Polachse. Der Himmelspol als Referenzpunkt auf dem Fixsternhimmel muss so weit entfernt sein, dass mit der Erdachse als Dreiecksbasis eine Entfernungsbestimmung unmöglich ist. Aber dazu weiter unten. Zunächst soll erläutert werden, wie Entfernungen innerhalb des Planetensystems ermittelt werden.

Entfernungsbestimmung innerhalb des Planetensystems

Aufgrund des 3. Keplerschen Gesetzes, dass sich die Kuben der großen Halbachsen[7] a wie die Quadrate der Umlaufdauern T verhalten $\left[\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2\right]$, können die *relativen* Abstände der Planeten im Sonnensystem berechnet werden. Dies sei am Beispiel von Erde und Venus erläutert.

$$\left[\left(\frac{a_V}{a_E}\right)^3 = \left(\frac{T_V}{T_E}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_V}{a_E} = \left(\frac{T_V}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Mit den (siderischen) Umlaufszeiten von Erde und Venus T_E =224,7d und T_E=365,25d ergibt sich:

[7] Die Keplerschen Gesetze beziehen sich auf die Ellipsenbahn der Planeten. In erster Näherung kann die Bahnkurve als Kreis angesehen werden. Dann ist die große Halbachse a gleich dem Radius r der Kreisbahn.

$$\Leftrightarrow \frac{a_V}{a_E} = \left(\frac{224{,}7d}{365{,}25d}\right)^{\frac{2}{3}} = (06152)^{\frac{2}{3}} = 0{,}723$$
$$\Leftrightarrow a_V = 0{,}723 \cdot a_E \Leftrightarrow a_E = 1{,}38 \cdot a_V$$

D.h. der Bahnradius der Venus beträgt das 0,723-fache der Entfernung Erde-Sonne. Aber wie groß ist das in km? Wie kommt man von dieser *relativen* zu einer *absoluten* Entfernungsangabe?

Die Bedeutung des Venustransits für die absolute Entfernungsmessung im Sonnensystem
Die Planeten bewegen sich nahezu in einer Ebene um die Sonne. Würden sie genau in einer Ebene liegen, würde die Venus regelmäßig als kleines Pünktchen vor der Sonne vorbeiziehen. Da aber Venus- und Erdbahn um 3,39°geneigt sind, kommt es nur in sehr unregelmäßigen Abständen zu einem Venustransit; und zwar in einem Zyklus von 8 - 121,5 – 8 – 105,5 Jahren, so dass sich eine Gesamtperiode von 243 Jahren ergibt. Die letzten beiden ereigneten sich im Juni 2004 und 2012, der nächste findet erst wieder im Jahre 2117 statt, der vorletzte 1882, so dass sich im gesamten 20. Jahrhundert kein Transit ereignete.
Der von 2004 war während seiner gesamten Dauer von Mitteleuropa aus beobachtbar und in Köln glücklicherweise durch keine Wolke beeinträchtigt. So konnte die AstrAG des Apostelgymnasiums den gesamten Verlauf durch Projektion der Sonne mit Hilfe eines Linsenteleskops der Schülerschaft präsentieren und fotographisch dokumentieren. 4 aus der insgesamt 34 Bilder umfassenden Serie zeigt die Abb. 6.

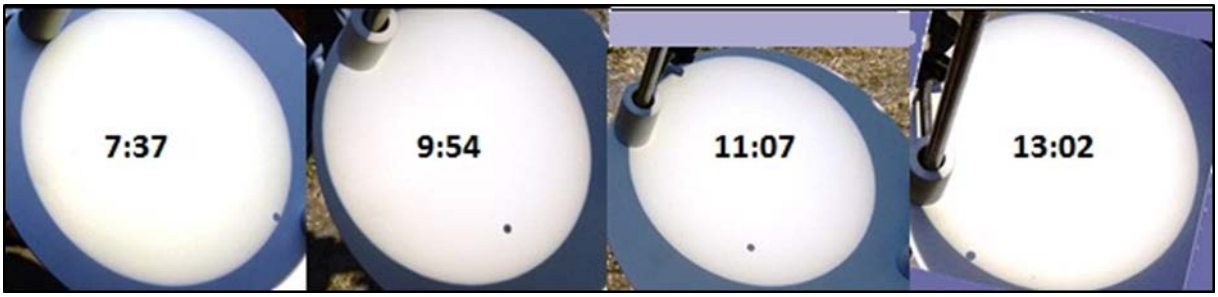

Abb. 6: Bilder von Venustransit 2004, AstrAG APG, Projektionsverfahren

Der englische Astronom *Edmund Halley* (1656–1742), ein Freund *Isaac Newtons*, war der

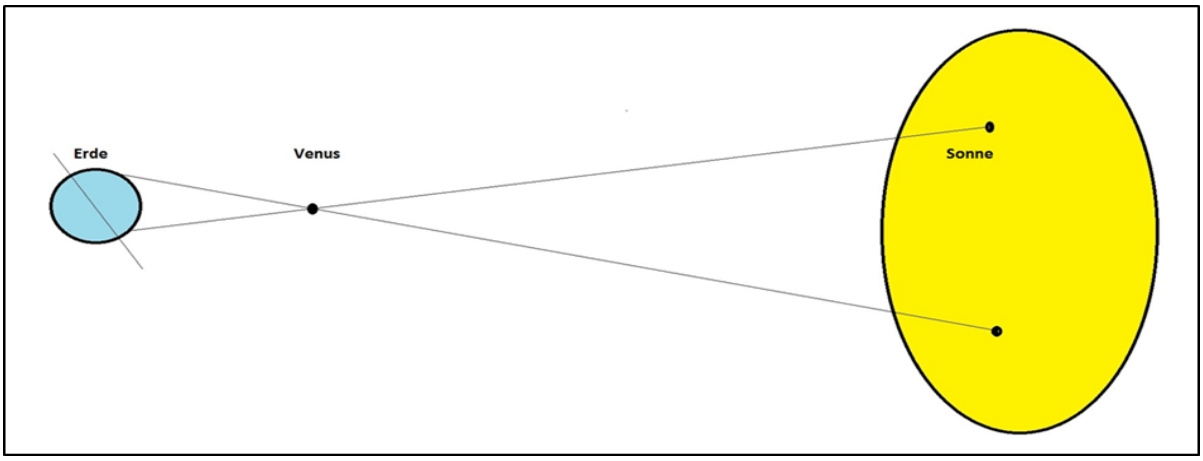

Abb. 7: Parallaxeneffekt der Venus vor der Sonne

erste, der erkannte, dass der Venustransit die Möglichkeit bot, die Entfernung Erde – Sonne,

die sog. Astronomische Einheit, viel genauer zu bestimmen, als es bis dahin möglich war. Wenn man nämlich den Transit von einem weit im Norden auf der Erde liegenden und gleichzeitig von einem auf der Südhemisphäre liegenden Punkt aus beobachtet, müsste die Bahn der Venus vor der Sonne wegen des Parallaxeneffekts verschoben sein (s. Abb. 7).
Kennt man die Größe der Sonne am Firmament in Winkelgrad, kann man die Distanz der scheinbaren Bahnen vor der Sonne und damit den Parallaxenwinkel der Venus bestimmen.[8] Dies ist noch nicht die eigentliche Venusparallaxe. Per definitionem ergibt sie sich in Analogie zur Mondparallaxe aus dem Tangens des Verhältnisses von Erdradius R und Entfernung Erde-Venus $\Delta r = r_E - r_V$. Hat man die Venusparallaxe nach dem hier dargestellten Verfahren ermittelt (sie beträgt 31,6 Bogensekunden), kann man nach der Beziehung

$$\frac{R}{r_E - r_V} = \tan \pi_V$$
$$r_E - r_V = \Delta r$$
$$\Rightarrow \frac{R}{\Delta r} = \tan \pi_V$$
$$\Delta r = \frac{R}{\tan \pi_V}$$

die absolute Entfernung Erde-Venus Δr beim Venustransit ermitteln. Sie ergibt sich zu

$$\Delta r = \frac{6370 km}{\tan\left(\frac{31{,}6}{3600}\right)^0} = 41{,}58 \cdot 10^6 km$$

Da aufgrund des 3. Keplerschen Gesetzes die *relativen* Entfernungen im Sonnensystem aus den Umlaufsdauern bestimmt werden können (siehe oben), kann nun mit dem Wert $\Delta r = 41{,}58 \cdot 10^6$km die *absolute* Entfernung Erde-Sonne, die sog. Astronomische Einheit, errechnet werden. Da absolute und relative Entfernung einander proportional sind, ergibt sich für r_E:

$$\frac{r_E}{a_E} = \frac{\Delta r}{\Delta a} \Leftrightarrow r_E = a_E \cdot \frac{\Delta r}{\Delta a} = \Delta r \cdot \frac{a_E}{\Delta a}$$
$$\Delta a = a_E - a_v$$
$$\Rightarrow r_E = \Delta r \cdot \frac{a_E}{a_E - a_V} = \Delta r \cdot \frac{1}{1 - \frac{a_V}{a_E}}$$

[8] Die Abb. 7 stellt nur das Prinzip des Parallaxenwinkels dar. Bei der Realisierung dieses Prinzips müssten noch einige Probleme gelöst werden, die hier übergangen werden können. So wäre u.a. die Frage zu klären, wie man auf dem Sonnenball einigermaßen exakt den Winkel bestimmt, sodann die Frage, wie man aus der Verbindung der beiden Beobachtungspunkte auf der Erde die Senkrechte auf der Verbindung Erdmittelpunkt der Erde – Venus (die Basislinie) ermittelt.

$$a_v = 0{,}723 \cdot a_E$$

$$\Rightarrow r_E = \Delta r \frac{1}{1 - \frac{0{,}723 \cdot a_E}{a_E}} = \Delta r \cdot \frac{1}{1 - 0{,}723} = \Delta r \cdot \frac{1}{0{,}277} = \underline{\underline{3{,}61 \cdot \Delta r = r_E}}$$

Mit der aus der Venusparallaxe ermittelten Entfernung $\Delta r = 41{,}58 \cdot 10^6$km folgt für r_E :

$$\underline{\underline{r_E = 150 \cdot 10^6 km}}$$ [9]

Ist schon die Mondentfernung eine Herausforderung an unser Vorstellungsvermögen, so erst recht die der Sonne. Eigentlich vorgestellt werden können solch große Entfernungen nicht mehr. Das Interessante aber ist, dass wir sie in Zahlen ausdrücken können. Unser Vorstellungsvermögen hilft sich mit Vergleichen. Bei der Mondentfernung hilft der Vergleich mit dem Erdradius, beim Sonnensystem der mit der Erdentfernung. Wegen ihrer Bedeutung für die Größenverhältnisse im Sonnensystem wird sie als Astronomische Einheit AE bezeichnet. So ist der Mars ca. 1,5 mal so weit von der Sonne entfernt wie die Erde. Man muss sich aber immer wieder klar machen, dass solche Vergleiche diese Entfernungen selbst nicht vorstellen. Die Vergleiche sind und bleiben Hilfen. Es sind und bleiben „Krücken“, aber notwendige. Denn andere Vorstellungshilfen haben wir nicht.

Entfernungsbestimmung von Fixsternen

Die Parallaxenmethode mit dem Erdradius als Dreiecksbasis reicht noch für die Entfernungsbestimmung innerhalb des Sonnensystems. Außerhalb seiner, also bei der der Fixsterne versagt sie aber. Liegen schon innerhalb des Planetensystems die Parallaxenwinkel im Bereich von Bogensekunden - eine Bogensekunde ist der 3600. Teil eines Winkelgrades! -, so führt die Messung noch kleinerer Winkel zu immer schlechteren Ergebnissen, da der relative Messfehler unvermeidbar größer wird. Will man mit der geometrischen Methode doch noch zu verwertbaren Ergebnissen kommen, bräuchte man eine größere Dreiecksbasis als der Erddurchmesser. Aber ist das überhaupt möglich? Zwei Beobachtungspunkte können doch keine größere Distanz als die des Erddurchmessers haben! Wenn der zweite Beobachtungspunkt auf dem Mond läge, hätte man die Mondentfernung als Dreiecksbasis, die 30-mal größer wäre als der Erdradius. Aber wir haben leider (noch) keinen zweiten Beobachtungspunkt auf dem Mond. Es scheint so, als müsste das Projekt, Entfernungen außerhalb des Sonnensystems zu messen, aufgegeben werden. Dem ist aber nicht so. Ohne die Erde verlassen zu müssen, steht dem beobachtenden Astronomen für seine Triangulationsmethode eine Basislänge zur Verfügung, die sogar um ein Vielfaches größer ist als die Mondentfernung! Wie ist das möglich? Dass es sich bei dieser Aussage nicht um Phantasterei handelt, leuchtet sofort ein, wenn man bedenkt, dass wir den Sternenhimmel im Laufe eines Jahres von verschiedenen Positionen aus beobachten, da sich die Erde, von der aus wir die Gestirne beobachten, im Laufe eines Jahres um die Sonne bewegt.

[9] Damit kann die Sonnenparallaxe π_S berechnet werden. Sie ergibt sich zu 8,8´´(Bogensekunden)

Im Abstand von einem halben Jahr befindet sich die Erde an den entgegensetzten Punkte ihrer jährlichen Bahn (s. Abb. 8). Die Basislänge wäre dann der Erdbahndurchmesser. Ein Vergleich des Erdbahnradius mit dem Kugelradius der Erde $\left(\frac{r_E}{R} = \frac{150 \cdot 10^6 km}{6370 km} = 23548\right)$ zeigt die enorme Erweiterung der Beobachtungsbasis für die Parallaxenmethode. Ein Fixstern müsste eigentlich mit Hilfe dieser Methode nach einem halben Jahr ein wenig verschoben erscheinen und damit seine Entfernung bestimmbar sein. Schon Anfang des 18. Jahrhunderts versuchte Bradley (1725) allerdings vergeblich, Fixsternparallaxen zu messen. Er fand zwar einen jährlichen Winkel von ca. 20´´ Bogensekunden. Er erkannte aber selbst, dass es sich dabei nicht um die gesuchte Fixsternparallaxe handelt, sondern um die sog. parallaktische Aberration des Lichts. Sie kommt dadurch zustande, dass das Licht von einem Fixstern, dessen Geschwindigkeit zwar unvorstellbar groß (300.000km/s) aber doch endlich ist, unter einem anderen Winkel in das Auge des Betrachters fällt, wenn dieser sich auch bewegt. Die Erde bewegt sich mit einer Bahngeschwindigkeit von 30km/s um die Sonne und damit auch der sich auf ihr befindende Beobachter.

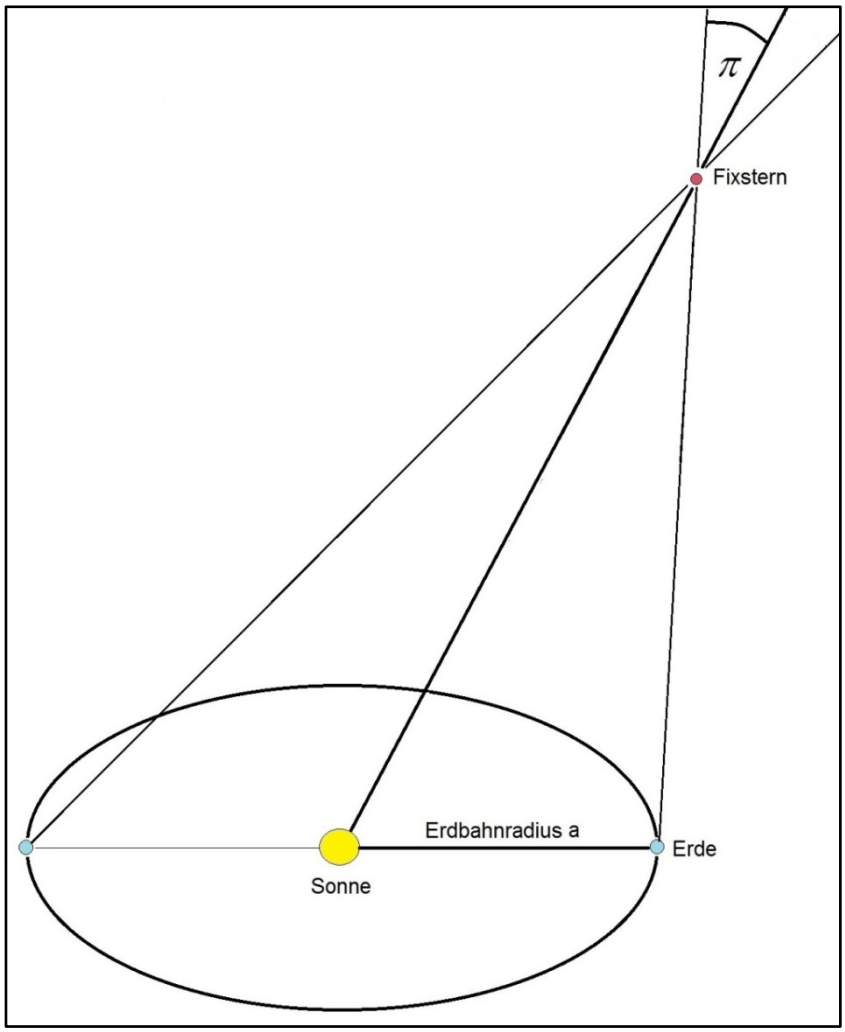

Abb. 8: Die jährliche Parallaxe mit dem Erdbahnradius als Dreiecksbasis

Erst 1839 gelang dem Mindener Astronomen *Friedrich Wilhelm Bessel* an dem Stern 61 Cygni (s. Abb. 9) die Messung einer Parallaxe mit 0,34 Bogensekunden. Die Parallaxen aller Fixsterne erwiesen sich kleiner als eine Bogensekunde $(\pi < 1'')$s. Tabelle! Diese extreme Kleinheit der Fixsternparallaxe war wohl der Grund, dass sie erst im 19. Jahrhundert nachgewiesen werden konnte. Sie war auch der Grund für die Einführung einer neuen astronomischen Entfernungseinheit. So wie die Astronomische Einheit AE ein anschauliches Maß für die Entfernungen im Sonnensystem darstellt, so eignet sich die Angabe der Fixsternparallaxe in Bogensekunden als Entfernungsmaß im Bereich der Fixsterne. Die Einheit *Parsec* (pc) ist die Entfernung eines Fixsterns, in der er unter der Parallaxe von

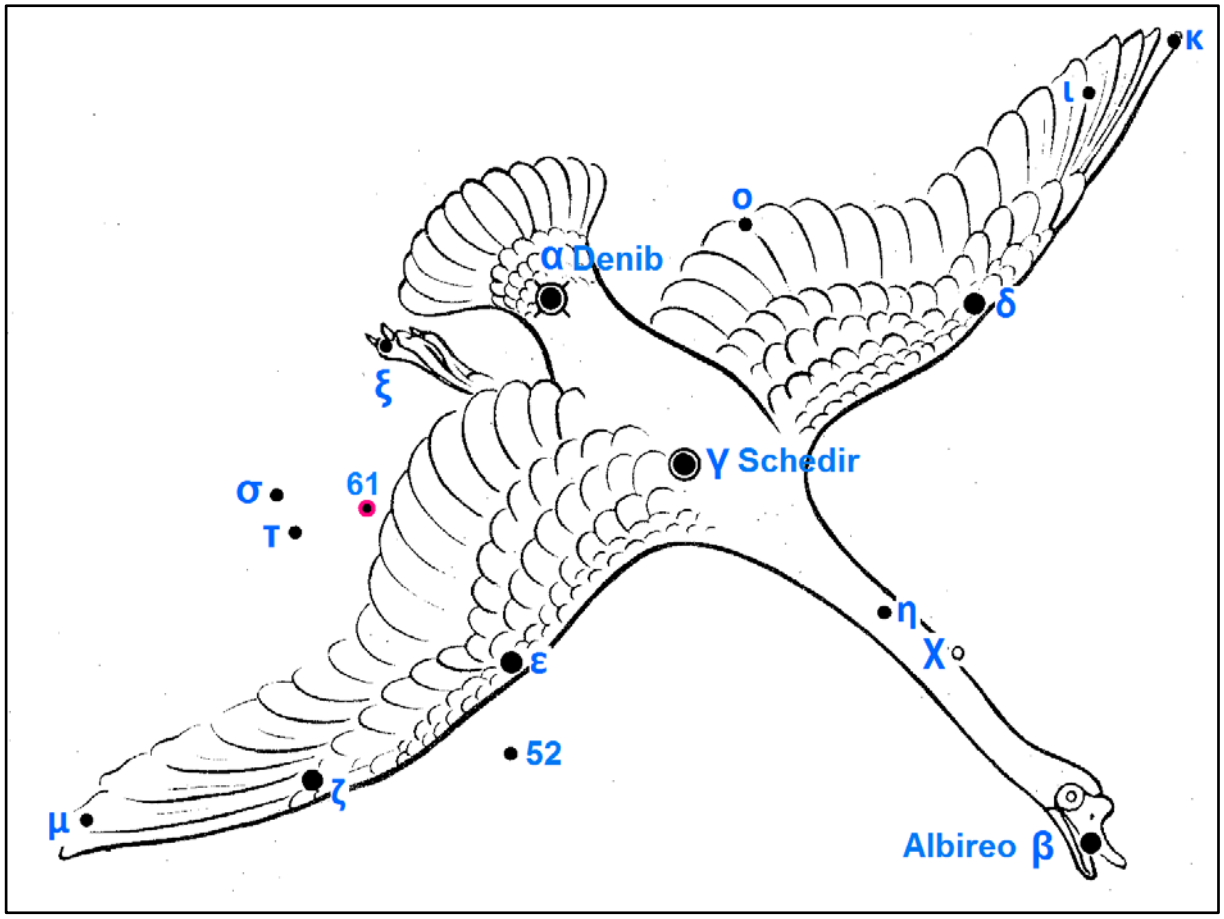

Abb. 9: Sternbild Schwan (Cygnus) mit dem Besselschen Stern 61

1 Bogensekunde erscheint. Wegen der Kleinheit der Fixsternparallaxe $(\pi < 1'')$ kann die Beziehung $\frac{a}{r_{Fix}} = \tan\pi$ zu $\frac{a}{r_{Fix}} = \pi$ vereinfacht werden (a ist die Entfernung Erde-Sonne, also die AE als Basislänge). Damit ergibt sich $r_{Fix} = \frac{a}{\pi}$, wobei der Winkel im Bogenmaß einzusetzen ist. Da a eine Konstante ist, sind r_{Fix} und $1/\pi$ einander proportional: $r_{Fix} \sim \frac{1}{\pi}$. Setzt man a = 1, wie man es oft in der Physik macht, ergibt sich die Definition $\underline{\underline{r_{Fix} \equiv \frac{1}{\pi}}}$. Und für die Einheit gilt dann nach den obigen Überlegungen: $r_{Fix}(\pi = 1'') = \frac{1}{1''} \equiv 1pc(par\sec)$. Der Entfernung von 2pc entspricht also ein Parallaxenwinkel von 0,5 Bogensekunden, und 0,1 Bogensekunden ergeben 10pc. (Zum Vergleich von Parallaxe und Parsec siehe Tabelle in Abb. 10).

So ist die Einheit Parsec – obwohl *nicht sehr anschaulich*[10] - für den Astronomen ein sehr *praktisches Maß*. Wie die Astronomische Einheit AE nur ein relatives Maß für die Abstände im Sonnensystem ist, so auch das Parsec im Bereich der Fixsterne. Für die Ermittlung der

[10] Wegen dieser Unanschaulichkeit benutzt man oft das anschauliche Maß Lichtjahr. Das ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt: 1LJ $=c\cdot t_a=3\cdot10^5$km/s$\cdot\pi\cdot10^7$s$=9{,}4\cdot10^{12}$km=0,3pc

absoluten Entfernung rechnet man praktischerweise zunächst das Sekundenmaß ins kohärente Bogenmaß um:

$$\pi = 1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^0 = \left(\frac{1}{3600}\right)^0 \cdot \frac{\pi_K}{180^0} = 4{,}848 \cdot 10^{-6} rad$$

dann ergibt sich für die absolute Entfernung in km:

$$\Rightarrow r_{Fix} = \frac{a}{4{,}848 \cdot 10^{-6}} = 206{,}26 \cdot 10^3 \cdot a = 206{,}265 \cdot 150 \cdot 10^6 km = \underline{\underline{30{,}9 \cdot 10^{12} km = 1pc}}$$

Damit hat man den Faktor für die Umrechnung von Parsec in km gefunden.
Für unseren nächsten Fixstern Proxima Centauri mit einer relativen Entfernung von 1,3 parsec ergibt sich dann eine absolute Entfernung von $\underline{40{,}17 \cdot 10^{12}\text{km}}$.

Stern	Bogensekunden	parsec	Lichtjahre
Proxima Centrauri	0,769	1,3	4,24
Sirius	0,379	2,6	8,61
61 Cygni	0,286	3,5	11,42
Wega	0,130	7,7	25,05
Bellatrix	0,013	77,4	252,45
Polarstern	0,008	132,0	430,53
Beteigeuze	0,005	200,0	652,32

Abb. 10: Parallaxe und Entfernung ausgewählter Sterne[11]

Rück- und Ausblick

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen waren die eigenartigen Parallelitäten der Pol- und Erdachse sowie die des scheinbaren und wahren Horizonts. Da sich Parallelen – so lehrt die Geometrie – im Unendlichen schneiden, müssen die Entfernungen im Weltraum unendlich oder doch unvorstellbar groß sein. Welche dieser beiden Möglichkeiten realisiert ist, kann nur durch Messung[12] der Entfernungen zu den Gestirnen entschieden werden. Das war der Grund, die *geometrische Methode* der astronomischen Entfernungsmessung zu erläutern und schrittweise die Ergebnisse vorzuführen. Irgendwann kommt allerdings auch die Dreiecksmethode der astronomischen Entfernungsmessung an ihre Grenzen[13], obwohl man diese immer noch ein wenig hinausschieben konnte, z.T. durch noch genauere Winkelmessverfahren von Satelliten aus, wo die Luftunruhe der Atmosphäre nicht mehr stört, aber auch durch Vergrößerung der Basislänge. Denn da sich die Sonne mitsamt ihrer

[11] Je nachdem, welches astronomische Nachschlagewerk man benutzt, sind die Entfernungsdaten leicht unterschiedlich.

[12] Es gibt auch rein theoretische Überlegungen, die darauf hinauslaufen, dass das Weltall nicht unendlich groß sein kann, so das Olberssche und Dynamische Paradoxon.

[13] Winkel kleiner einer hundertstel Bogensekunde (π<0,01´´) können praktisch nicht mehr gemessen werden. Damit können Entfernungen über 100parsec (≈300LJ) nicht mehr gemessen werden. Das ist aber nicht mehr als 0,3% des Durchmessers der Milchstraße.

Planeten um das Milchstraßenzentrum bewegt, legt sie in einem Jahr ca. 600 Mio km zurück. Damit hat man das Doppelte des Erdbahndurchmessers als Basislänge.

Mit diesen Ausführungen haben wir die Ausgangsfrage (siehe Seite 3 unten) beantwortet.

Unabweisbar drängt sich aber die Frage auf, wie man denn noch größere Entfernungen im Weltraum messen kann. Wie hat man unsere eigene Galaxie, unsere Milchstraße mit einem Durchmesser von rund 100.000LJ vermessen, wenn nur ca. 300LJ maximal mit dieser Methode gemessen werden können (siehe Abb. 11 und Fußnote 13!)? Und wie bestimmt man die Entfernung zu anderen Galaxien. Da die geometrische Methode nicht mehr anwendbar ist, muss es noch andere Methoden der Entfernungsmessung geben. Daher sei am Schluss noch eine ganze andere Methode erwähnt: die Möglichkeit nämlich, aus der Helligkeit eines Gestirns auf seine Entfernung zu schließen. Die Idee, die dieser Methode zugrunde liegt, benutzt die Tatsache, dass die Helligkeit eines Gestirns mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt: $E \sim \frac{1}{r^2}$. Wenn man auf irgendeine Weise aus dieser scheinbaren Helligkeit die wirkliche, die sog. absolute Helligkeit,[14] bestimmen kann, - und man kann es! - dann kann man auch die Entfernung errechnen. Auch diese *photometrische Parallaxen*-Methode[15] ist, da Lichtquellen sich nicht nur in der Helligkeit, sondern in weiteren Eigenschaften wie Farbe, Spektrum und vor allem auch Leuchtfrequenz[16] unterscheiden, vielseitig ausbaufähig.

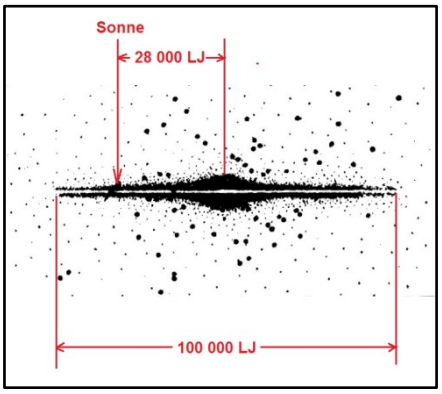

Abb. 11: Seitenansicht unserer Galaxie; der Messbereich von 300LJ ist zu klein, um ihn noch einzeichnen zu können.

Quellennachweis:

Die figürliche Darstellung des Sternbildes Schwan (Abb. 9) ist eine bearbeitete Darstellung aus dem *Atlas der Sternbilder* von Oswald Thomas, 1962.

Abb. 11 aus dem *Großen Lexikon der Astronomie* von Joachim Herrmann, auch verändert

März 2018 Viktor Schreier

[14] Unter absoluter Helligkeit versteht man die Helligkeit in einer Entfernung von 10parsec.
[15] Es ist klar, dass der Begriff *Parallaxe* hier nicht mehr im ursprünglichen geometrischen Sinne benutzt wird.
[16] Bestimmte Sterne ändern sehr regelmäßig ihre Helligkeit, so z.B. die sog. Cepheiden-Stene, benannt nach dem Stern δ im Sternbild Cepheus. Man fand, dass zwischen der Dauer der Helligkeitsperiode und der Masse eine feste Beziehung besteht, die sog. Masse-Leuchtkraftbeziehung. Mit ihrer Hilfe konnte Hubble in den 1920 Jahren, als er im Andromedanebel mit dem damals besten Teleskop einzelne Sterne auflösen konnte, ihre Entfernung bestimmen (ca. 2 Mio LJ). Damit war bewiesen, dass er kein Nebel (Gaswolke) innerhalb unserer Milchstraße, sondern eine eigene Galaxie ist.