Die Weltstädterose

Eine Besonderheit der APG-Sonnenuhr ist die Weltstädterose. Um den Polos sind in die Bodenplatten kreisförmig Pfeile aus Edelstahl, die Richtung und Entfernung von 12 ausgewählten Weltstädten angeben, eingelassen (s. Abb. 1 u. 2).

Abb. 1

Abb. 2

Im strengen Sinne sind sie kein notwendiger Bestandteil der Sonnenuhr; denn die Richtungen und Entfernungen beziehen sich auf die Erde, sind somit *terrestrischer* Natur. Sonnenuhren sind aber *astronomische* und somit *extraterrestrische* Winkelmessgeräte wie sie vor allem in den Zeiten der rein visuellen Astronomie zur Positionsbestimmung von Sternen eingesetzt wurden. Denn bei der Sonnenuhr ist die Länge des Schattenwurfs ein Maß für den Höhenwinkel unseres Zentralgestirns am Himmelsgewölbe. Seine Veränderung im Laufe eines Tages und Jahres wird hier zur Bestimmung der Tages- bzw. Jahreszeit genutzt.

Auf dieser Ebene der Betrachtung haben Sonnenuhr und Weltstädterose nicht nur nichts gemeinsam, ja sie scheinen gegensätzlicher Natur zu sein. Was spricht dann dafür, sie in einer einzigen Anlage zu vereinen, so wie es bei der APG-Sonnenuhr der Fall ist? Die Richtungs- und Entfernungsangaben lassen sich nur sinnvoll unter der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde erklären (s. unten). Diese hat sie mit den meisten Himmelskörpern, insbesondere den Planeten gemeinsam. Sie ist ein Planet unter anderen. Der Wechsel von Tag und Nacht ist eine Folge der Achsendrehung der Erde als Kugel und der der Jahreszeiten eine der Schiefstellung der Erdachse auf der Bahnebene. Die Kugelgestalt fließt also sowohl in die Erklärung der Sonnenuhr wie die der Städterose ein. Es ist somit zweckmäßig, die Weltstädterose mit der Sonnenuhr zu kombinieren, zumal dadurch noch deutlicher die Kugelgestalt der Erde ins Bewusstsein gehoben wird.

Im Folgenden sollen die Weltstädterose beschrieben und danach die sich aus der Kugelgestalt der Erde ergebenden Probleme erläutert und die beiden zu deren Bestimmung benutzten Formeln hergeleitet werden.

Die ausgewählten Weltstädte

Nur solche Städte sind ausgewählt worden, die um den Globus verteilt sind, also wirkliche Weltstädte sind, und die in der Anordnung mehr oder weniger einen Kreis, eine „Rose“ ergeben.
In der nebenstehenden Tabelle sind sie mit ihren Ortskoordinaten sowie Entfernung und Kurs angegeben. Dabei wurden folgende Formeln benutzt.

	Weltstädte	Ortkoordinaten		Entfg. in km	Azimut α
		Breite ϕ	Länge λ		
0	Köln	50,93°	6,92°		
1	Tokio	35,7°	139,77°	9348	36°
2	Wellington	-41,3°	174,77°	18690	47°
3	Moskau	55,75°	37,57°	2088	63°
4	Istanbul	41,03°	28,97°	2019	114°
5	Jerusalem	31,8°	35,24°	3148	121°
6	Rom	41,9°	12,48°	1091	154°
7	Madrid	40,4°	-4,15°	1451	220°
8	Paris	48,9°	2,3°	401	401°
9	Lima	-12,5°	-72,0°	10336	237°
10	New York	40,7°	-73,98°	6058	293°
11	San Franzisko	37,78°	-122,43°	8995	321°
12	Anchorage	61,25°	-149,0°	7367	347°

Geographische Breiten der Süd- und Längen der Westhemisphäre sind durch ein Minuszeichen gekennzeichnet. Das Azimut α ist der Horizontbogen (Winkel) gemessen N➔O➔S➔W➔N

Abb. 3: Ortskoordinaten der Weltstädte mit Entfernung

Kurswinkel α_K:

$$\alpha_K = \arcsin\left[\frac{(\sin(\lambda_X - \lambda_K)\cdot\cos\varphi_X}{\sin b}\right]$$

Entferung b:

$$b = \frac{\pi\cdot R}{180°}\arccos(\sin\varphi_K\cdot\sin\varphi_x + \cos\varphi_K\cdot\cos\varphi_x\cdot\cos(\lambda_K - \lambda_x))$$

Der Mittelpunkt der „Rose“ wurde aus ästhetischen Gründen in den Polos und nicht in den Gnomon gelegt, wie es in der Konstruktionsskizze (Abb.4) zu sehen ist.

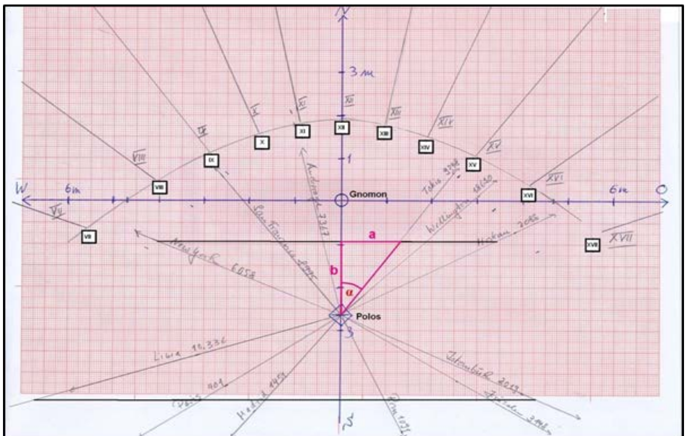

Abb. 4.: Aufsicht auf die Sonnenuhr mit Stundenlinien und – tafeln, Polos mit Richtungen der Weltstädte (Konstruktionsskizze)

Die kugelförmige Gestalt der Erde

Richtung und Entfernung zwischen zwei in einer Ebene liegenden Punkten zu bestimmen ist trivial. Der unmittelbare visuelle Eindruck, der die Erdoberfläche als Ebene zeigt, wenn man von den natürlichen Unebenheiten absieht, täuscht darüber hinweg, dass sie ein Ausschnitt aus einer Kugeloberfläche ist. Zwar benutzt man zur Vermessung

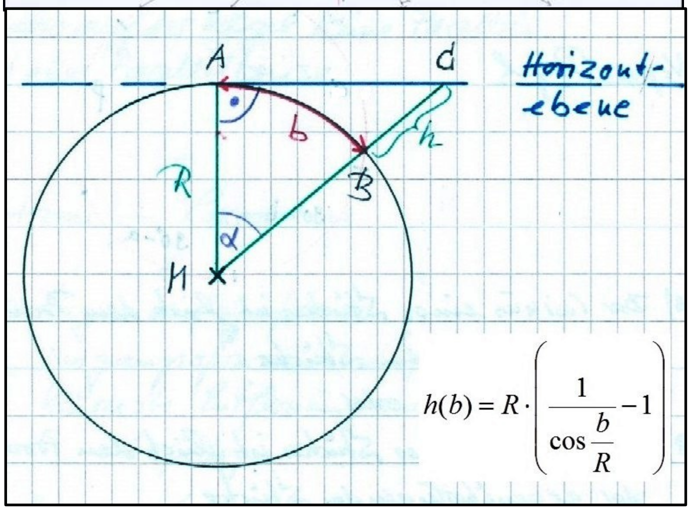

Abb. 5: geometrische Beziehungen zur Ableitung von h(b)

von Gebäuden und Straßen Hilfsmittel wie Wasserwaagen und heute Laserpointer, die die Gerade als geometrisches Element der Ebene voraussetzen. Dies gilt aber nur für relativ kurze Strecken. Bei einer Strecke von 500m ist die Abweichung von der Tangentialebene gerade 2cm; aber bereits bei 160km sind das 2000m. D.h. der Gipfel eines 2000m hohen Berges verschwindet dann unter dem Horizont. Dies kann man leicht mit der Formel $h(b) = R \cdot \left(\frac{1}{\cos \frac{b}{R}} - 1 \right)$ nachprüfen, die aus einfachen geometrischen Beziehungen ableitbar ist (s. Abb. 4).

Entfernungen auf der Kugel

Abb. 6: Vergleich des kürzesten Weges von Köln nach Calgary mit dem über den Breitengrad. Dass in dieser Darstellung der Weg über Grönland größer erscheint als der über den Breitenkreis, wird durch die Zylinderprojektion vorgetäuscht.

Hier ergibt sich ein Problem: Wie bestimmt man auf einer Kugel den kürzesten Abstand zwischen den Punkten A und B, die Kugelentfernung? Und wie bestimmt man die Richtung, in der man sich auf der Erdkugel bewegen muss, wenn man auf kürzestem Wege von A nach B kommen möchte, den sog. Kurs bzw. das Azimut, das in der obigen Tabelle angegeben ist? Ein konkretes Beispiel: Köln und Calgary in Kanada liegen ziemlich genau auf dem gleichen Breitengrad. Man sollte meinen, dass man sich von Köln aus immer geradeaus nach Westen (also auf dem 51. Breitengrad) bewegen müsste. Dem ist aber nicht so. Wie in der Abb. 6 zu erkennen ist, führt der kürzeste Weg in nordwestliche Richtung über Grönland und Nordkanada. Der Unterschied beider Wege beträgt über 1000km! Wieso ist das so?

Groß- und Kleinkreise auf der Kugel

Zur Klärung, wie man den kürzesten Weg auf der Kugel bestimmt, sollen zwei Gedankenexperimente helfen. Eine Ebene wandere in Lotrichtung durch eine Kugel hindurch (s. Abb.7). Zunächst berührt sie die Kugel in einem Punkt. Sie ist die Tangentialebene an der Kugel. Wenn sie parallel weiter wandert, wird aus diesem Punkt ein Kreis, deren Radien stetig größer werden, bis sie schließlich den Kugelmittelpunkt erreicht und der Radius des Kreises maximal wird. Für die Radien der verschiedenen Kreise gilt die Beziehung: $0 \leq r \leq R$. Man nennt alle Kreise, deren Ebenen durch den Kugelmittelpunkt verlaufen, *Großkreise* (r = R), alle anderen dagegen *Kleinkreise* (r < R).

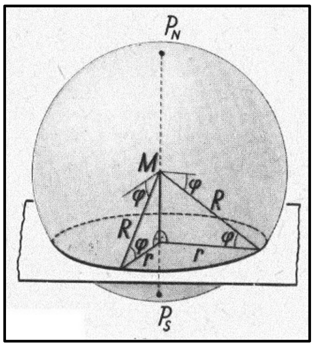

Abb. 7. Zum 1. Gedankenexp.

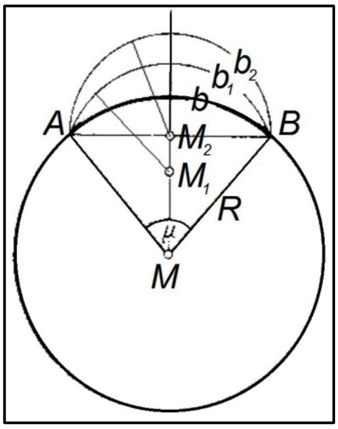

Abb. 8: Zum 2. Gedankenexp.

Die Frage ist nun, ob die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Kugel ein Bogen auf einem Klein- oder Großkreis ist. Zu Klärung dieser Frage soll das zweite Gedankenexperiment dienen. A und B seien zwei beliebige Punkte auf einer Kugel. Um die Sehne drehe sich eine Ebene. Dabei entstehen verschiedene Kleinkreise und ein Großkreis. Für die Radien r gilt: $\frac{1}{2}\overline{AB} \leq r \leq R$. Klappt man die Schnittebenen in die Großkreisebene, so sieht man, dass der Bogen mit dem größten zugehörigen Radius, also der Großkreisbogen die kürzeste Verbindung zwischen den Punkten A und B darstellt (siehe Abb. 8) . Das ist ein wichtiges Ergebnis. *Entfernungen auf der Kugel sind also Großkreisbögen*. Man nennt sie auch *Orthodrome* oder *Geodäten*. Der 51. Breitenkreis, auf dem Köln und Calgary liegen, ist somit ein Kleinkreis und stellt nicht die kürzeste Verbindung zwischen diesen beiden Orten dar; der Großkreis, auf dem Köln und Calgary liegen und der die kürzeste Verbindung dieser Orte darstellt, führt über Grönland, obwohl die Skizze in Abb. 6 wegen der Zylinderprojektion zunächst etwas anderes vermuten lässt.

Herleitung der Entfernung und des Kurswinkels
- ein kleiner Exkurs in die Geometrie auf der Kugel -

In der nebenstehenden Skizze (s. Abb. 9) sind der zu bestimmende Entfernungsbogen b und der Kurswinkel α_K in das sphärische Dreieck P_1, P_2, P_N eingezeichnet. Da die Seiten des Kugeldreiecks Bögen sind, kann man sie als Winkel auffassen, deren Scheitel der Kugelmittelpunkt ist. Oder noch anders ausgedrückt: Die Dreiecksseiten sind Projektionen vom Mittelpunkt der Kugel auf die Sphäre. Im Kugeldreieck treten damit 6 Winkel, sog. „Stücke" auf: Die „klassischen" Winkel α, β und γ und die als Winkel aufgefassten Seiten a, b und c. Dadurch werden die in sphärischen Dreiecken geltenden geometrischen Beziehungen komplizierter als die der Ebenen Geometrie. Um die hier geltenden Gesetzmäßigkeiten zu analysieren, geht man sinnvoller Weise wie in der ebenen Geometrie vom *rechtwinkeligen Kugeldreieck* aus. Die Untersuchung zeigt dann, dass der Kosinus eines Stückes gleich dem Produkt der Kotangenten der anliegenden Stücke oder gleich dem Produkt der Sinus der nichtanliegenden Stücke ist, wobei die Katheten a und b durch ihre Komplemente ersetzt werden müssen:

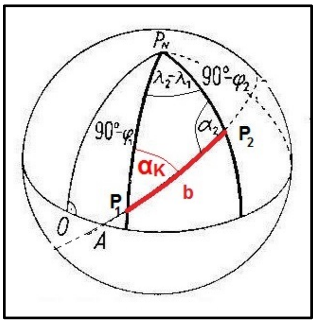

Abb. 9: sphärisches Dreieck zur Kurswinkel- und Entfernungsbestimmung

$$\cos c = \cot\alpha \cdot \cot\beta = \sin(90° - a)\cdot\sin(90° - b)$$

Nach dieser Neper-Regel ergeben sich insgesamt 5·2=10 solcher Formeln, die hier im Einzelnen nicht aufgezeigt werden müssen.

Beim *allgemeinen Kugeldreieck* kann man wie in der ebenen Geometrie das Dreieck in zwei rechtwinkelige zerlegen und auf sie die Neperschen Formeln anwenden. Wie beim ebenen Dreieck gibt es hier einen *Sinussatz*. Er hat fast die gleiche Form wie der des ebenen Dreiecks: *Die Sinus der Winkel verhalten sich wie die Sinus der zugehörigen Seiten*:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=const <=> \sin\alpha \sim \sin a}$$

Ihn kann man benutzen, um den Kurswinkel α_K zu bestimmen. Mit Hilfe der Bezeichnungen aus der Skizze in Abb. 8 ergibt sich:

$$\frac{\sin\alpha_K}{\sin(90°-\varphi_2)}=\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)}{\sin b}$$

$$\sin(90°-\varphi_2)=\cos\varphi_2 \qquad \textit{Komplementbezieung}$$

$$=> \frac{\sin\alpha_K}{\cos\varphi_2}=\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)}{\sin b}$$

$$<=> \sin\alpha_K=\underline{\underline{\frac{\sin(\lambda_2-\lambda_1)\cdot\cos\varphi_2}{\sin b}}}$$

Dazu muss allerdings der Entfernungsbogen b bekannt sein. Dazu dient der sog. *Seitenkosinussatz*. Auch er leitet sich aus der Zerlegung des Dreiecks in zwei rechtwinkelige und die nachfolgende Anwendung der Neperregel ab und beschreibt den Zusammenhang zwischen den Kosinus der drei Seiten und dem Kosinus eines Gegenwinkels:

$$\boxed{\cos a=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos\alpha}$$

Durch zyklische Vertauschung ergeben sich zwei weitere Formeln.

Die Formel muss nun auf unseren Fall übertragen werden, d.h. dessen Bezeichnungen müssen in die Formel eingesetzt werden.
Der Winkel ϕ bezeichnet die geographische Breite des Ortes und λ seine Länge.
In dem Dreieck der Skizze (Abb. 8) sind die anliegenden Seiten der gesuchten Seite b die Seiten 90°-ϕ_1 und 90°-ϕ_2; der Gegenwinkel zur Seite b ist die Längendifferenz λ_2-λ_1. Damit ergibt sich:

$$\boxed{\cos b=\cos(90°-\varphi_1)\cdot\cos(90°-\varphi_2)+\sin(90°-\varphi_1)\cdot\sin(90°-\varphi_2)\cdot\cos(\lambda_2-\lambda_1)}$$

Mit den Komplementbeziezungen cos (90°- α) = sin α und sin (90°- α) = cos α folgt:

$$\cos b=\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cdot\cos(\lambda_2-\lambda_1)$$

$$<=> \underline{\underline{b=\arccos(\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2+\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2\cdot\cos(\lambda_2-\lambda_1)}}$$

b ist die Entfernung auf der Einheitskugel. Wie oben erläutert werden im Kugeldreieck die Seiten als Winkel betrachtet und auch so behandelt. Die Entfernung b ist somit auch eine *Winkelangabe*, die man je nach Winkelmaß im Bogen- oder Gradmaß angeben kann. Um sie in eine echte Entfernung auf der wirklichen Erdkugel umzurechnen, muss das Ergebnis noch mit R (beim Winkel im Bogenmaß) oder mit dem Faktor $\frac{\pi \cdot R}{180°}$ (beim Winkel im Gradmaß) multipliziert werden. Wenn man die Entfernung im *Längenmaß* mit B bezeichnet, ergibt sich für die Endformel:

$$\boxed{\begin{array}{l} B = R \cdot \arccos(\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \qquad \textit{oder} \\[2ex] B = \dfrac{\pi \cdot R}{180°} \cdot \arccos(\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 \cdot \cos(\lambda_2 - \lambda_1)) \end{array}}$$

Viktor Schreier, Januar 2017

Bildquellennachweis:
Die Abb. 7, 8 und 9 sind Reidt-Wolff, Elemente der Mathematik, Bd. 4, entnommen und bearbeitet